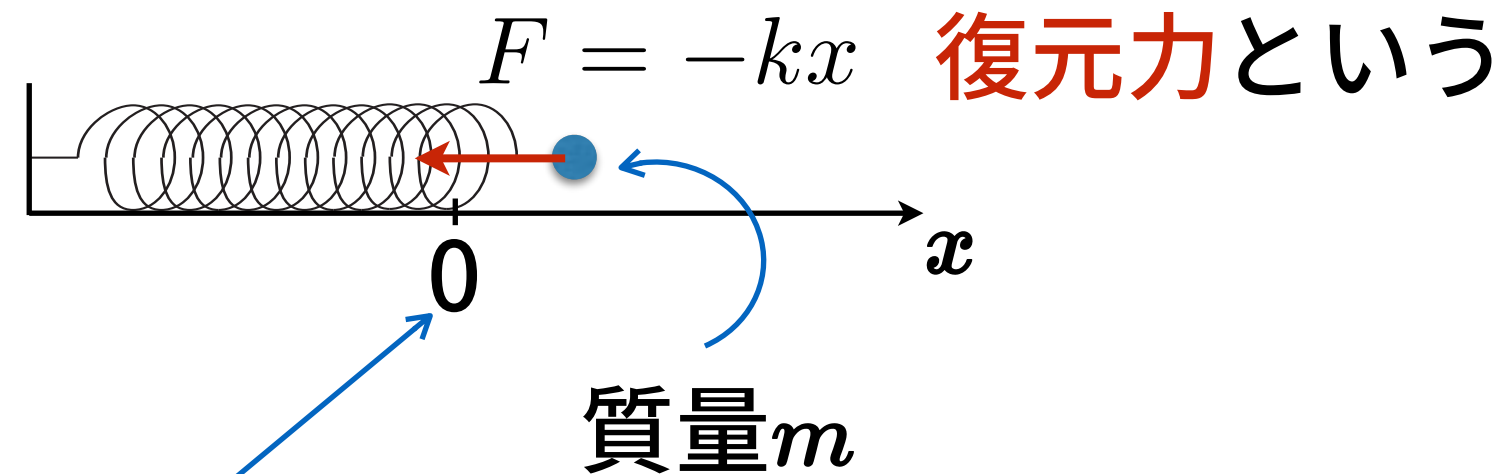


物理学E

No.01

単振動の復習

ばねによる力のもとでの運動



ばねが自然長のときの質点の位置

運動方程式： $m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t)$

初期条件： $t=0$ のときに $x(0)=x_0$ ， $v(0)=v_0$



運動方程式を解いて，この物体の運動を調べる

運動方程式を解く

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$



両辺を m で割る

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t)$$

物理学Aで出てきた, $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$ の形の微分方程式

重ね合わせ

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$



$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) x(t) = 0$$

全ての項が x の1次

線形斉次方程式という

2つの解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ が見つかったとする

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) x_1(t) = 0 \qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) x_2(t) = 0$$

$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t)$ もこの方程式の解

重ね合わせ

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) (A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t)) = A_1 \underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) x_1(t)}_{=0} + A_2 \underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) x_2(t)}_{=0} = 0$$

線形斉次方程式の場合には，複数の特解の線形結合も，方程式の解になる。（重ね合わせの法則）

指数関数を用いた解法

微分して自分自身が出てくる関数： $e^{\lambda t}$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \quad \xleftarrow{\text{代入}} \quad x(t) = e^{\lambda t}$$

$$\frac{d^2 e^{\lambda t}}{dt^2} = \frac{d(\lambda e^{\lambda t})}{dt} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

よって、 $\lambda = \pm i\omega$ であればO.K.

$$x_+(t) = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$$x_-(t) = e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

解の候補が2つ見つかった

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

オイラー公式の利用

一般解は2つの解の線形結合をとって、

$$x(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}$$

↑ ↑
複素数の定数

ちなみに 実数関数

↓ ↓

$$x(t) = x_R(t) + ix_I(t) \quad \text{としておくと,}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) x_R(t) = 0 \qquad \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) x_I(t) = 0$$

実部，虚部のそれぞれが解になっている。

練習問題

微分方程式 $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$

を以下のそれぞれの初期条件のもとで解いて解を求めよ。

1. $t=0$ のときに $x=x_0, v=0$

2. $t=0$ のときに $x=0, v=v_0$

3. $t=0$ のときに $x=x_0, v=v_0$

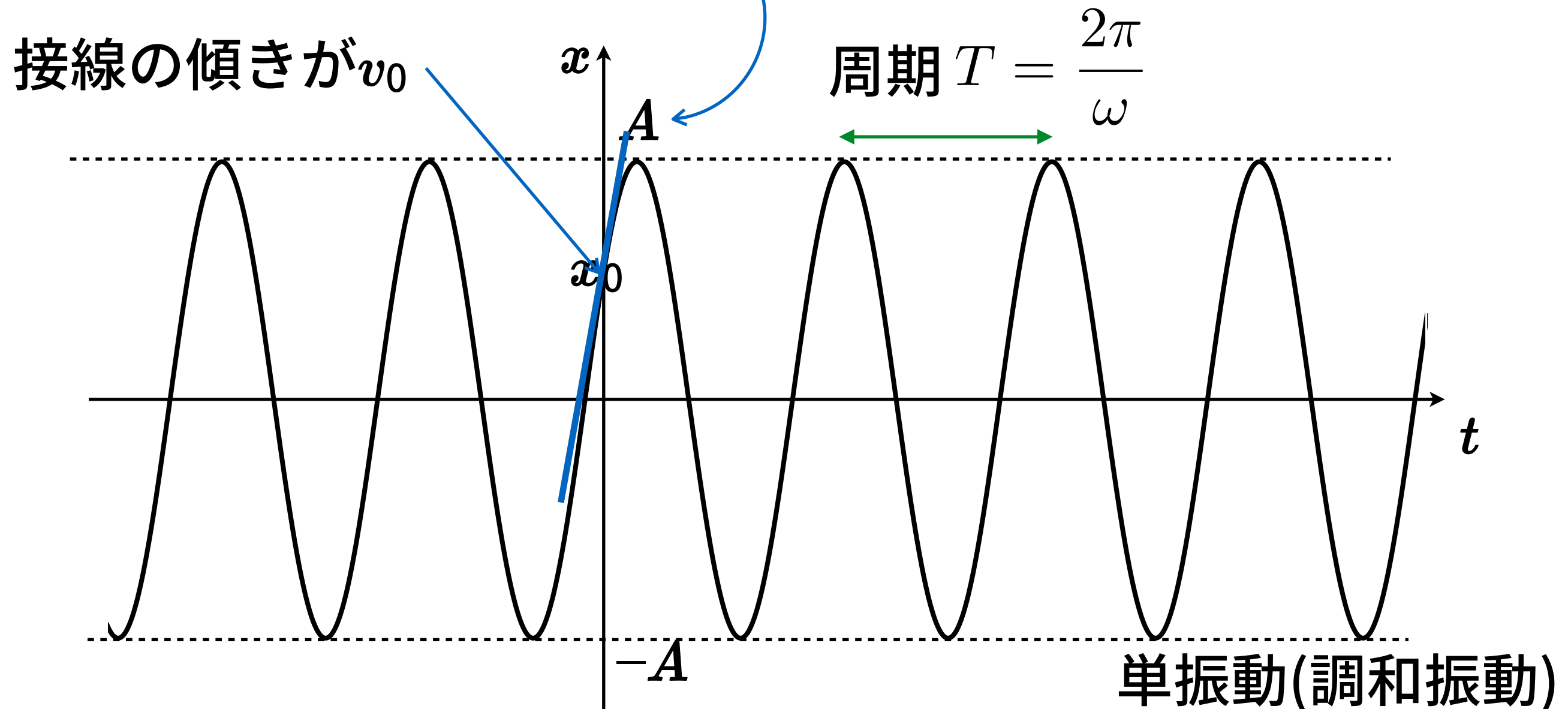
ただし, $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

運動の様子を調べる

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \sin(\omega t + \theta_0)$$

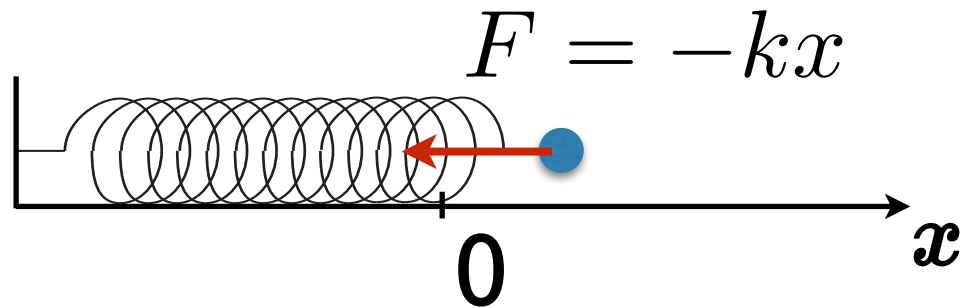
振幅は $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$

$$\tan \theta_0 = \frac{x_0 \omega}{v_0}$$



復元力のポテンシャル

$$F = -kx$$



この力がする仕事は経路によらない



ポテンシャル $U(x)$ が存在する

$x=0$ を基準の位置に選ぶ ($U(0)=0$)

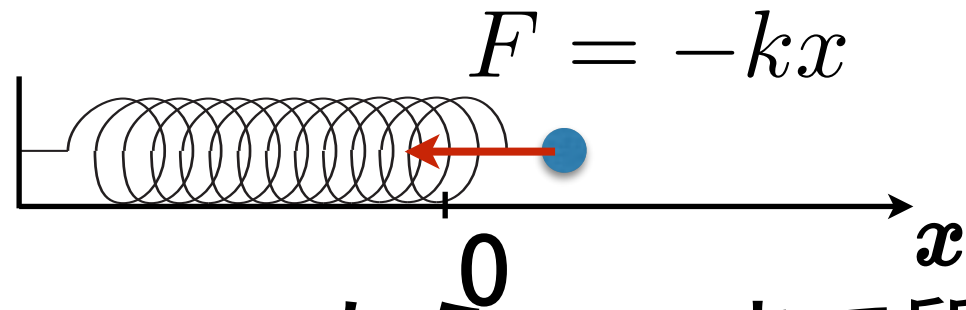
$x=0$ から任意の位置 X まで質点が動くときに、
ばねによる力がする仕事は？

$$W = \int_0^X F dx = \int_0^X (-kx) dx = -\frac{k}{2} X^2$$

|| ← ポテンシャルの定義
 $U(0) - U(X)$

$$U(x) = \frac{k}{2} x^2$$

復元力のポテンシャル



ポテンシャル $U(x) = \frac{k}{2}x^2$

$x=x_0$ から $x=x_1$ まで質点が動くときに、 F がする仕事は

$$W = U(x_0) - U(x_1) = \frac{k}{2}x_0^2 - \frac{k}{2}x_1^2$$

ばねが伸びたり縮んだりすると、そこには $\frac{k}{2}x^2$ のエネルギーが貯まっていると思えばよい。

$x=A$ から $x=0$ までおもりが動く場合にばねがする仕事

$$W = U(A) - U(0) = \frac{k}{2}A^2$$

この分だけポテンシャルが減る $U(A) = \frac{k}{2}A^2 \rightarrow U(0) = 0$

エネルギー保存則

単振動の場合，作用している力は保存力のみ

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ v(t) = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t \end{cases} \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

運動エネルギーとポテンシャルの和を計算してみる

$$\begin{aligned} K + U &= \frac{m}{2} v^2 + \frac{k}{2} x^2 \\ &= \frac{m}{2} (-x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t)^2 + \frac{k}{2} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \right)^2 \\ &= \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} x_0^2 \quad \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1 \text{ に注意} \end{aligned}$$

確かに時間によらず一定値!

単振動の重要性

- ★ 単振動はばねの運動を記述するだけではない
- ★ 自然界のあらゆるところで，近似的に単振動のようにふるまう運動を見ることができる
- ★ 方程式がばねの運動と同じ形をしているものは，単振動としてあつかえる。
微分方程式が同じ形なら，数学的な解も同じ。

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\omega^2 f(t)$$

単振動の例

振り子の運動

X方向の運動方程式

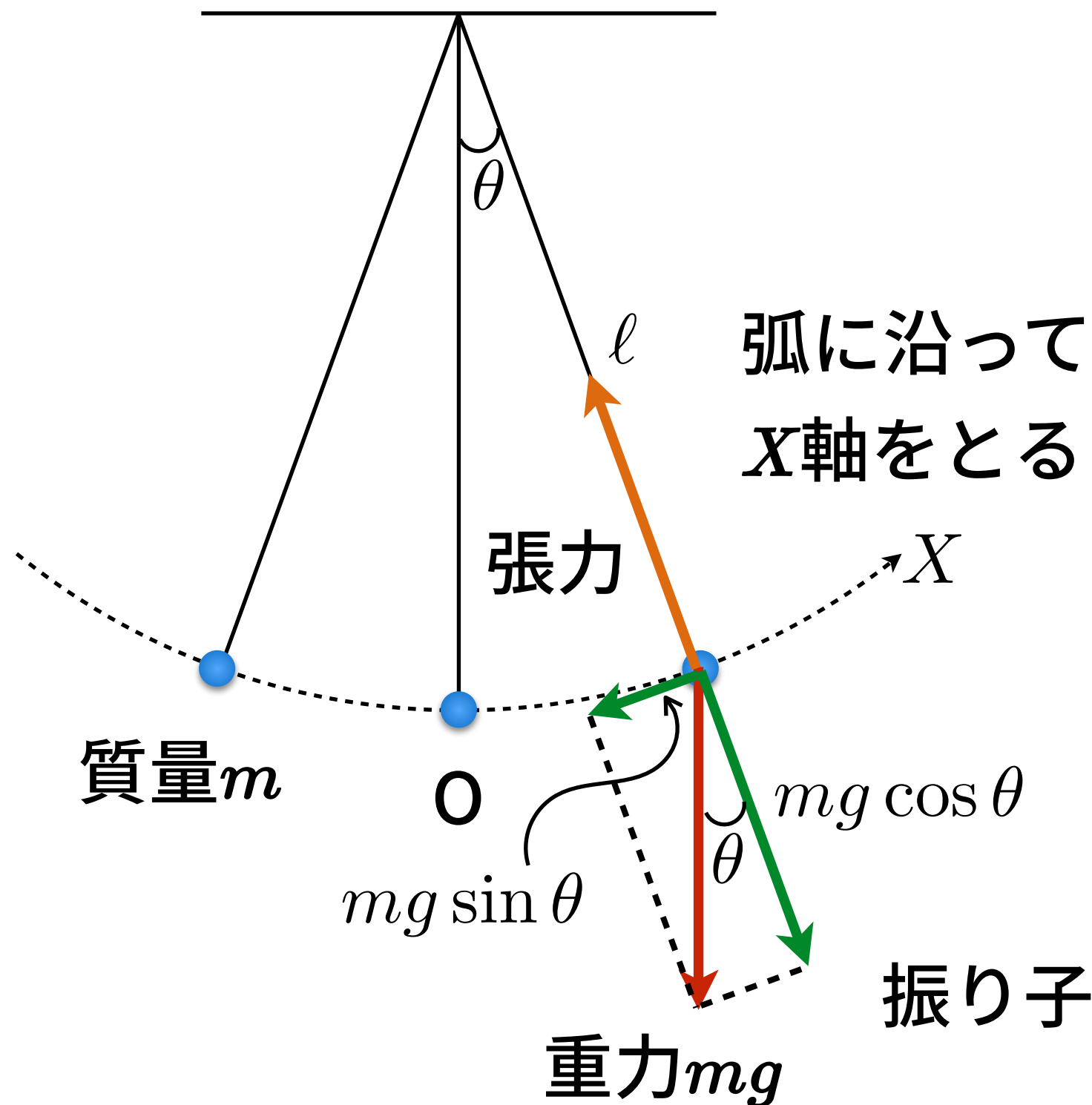
$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

$$\theta \ll 1 \longrightarrow \sin \theta \simeq \theta$$

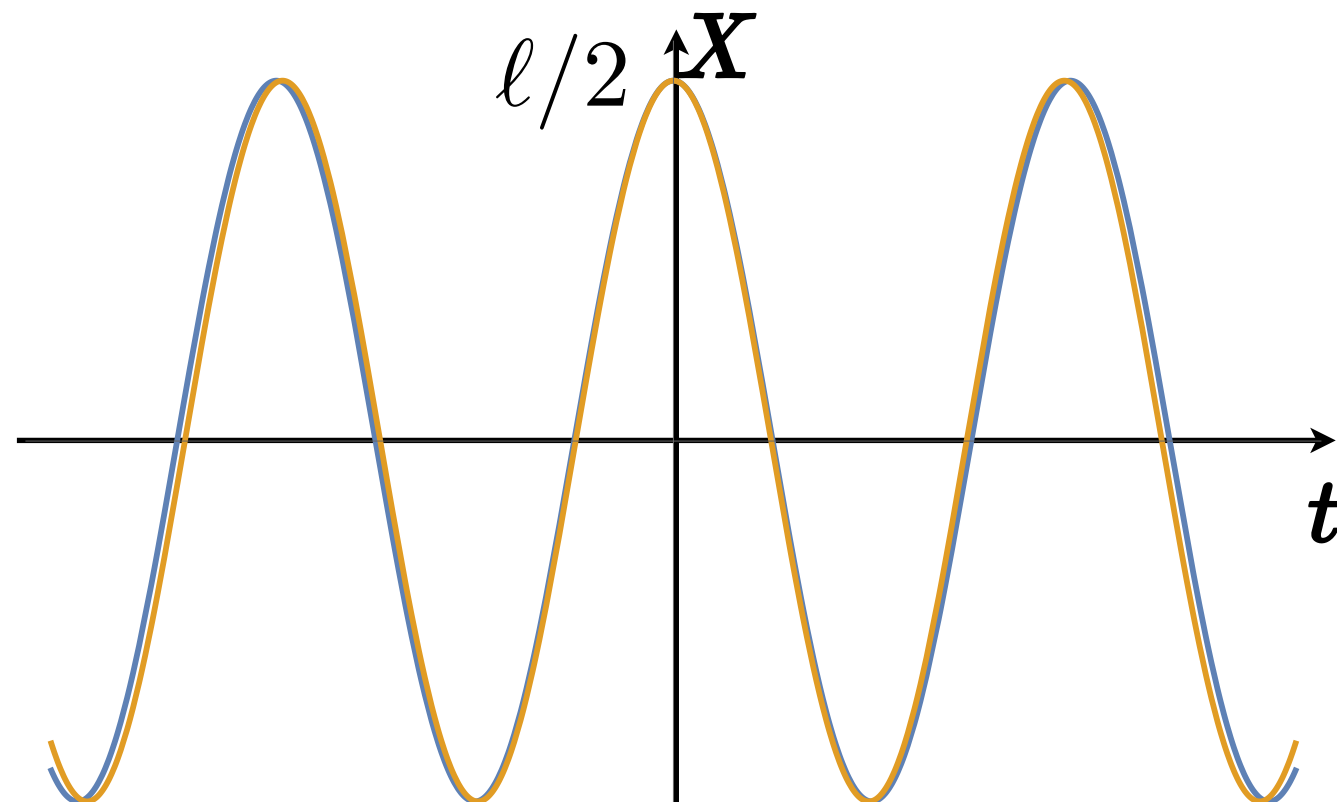
$$X = \ell \theta$$
$$m \frac{d^2 X}{dt^2} \simeq - \boxed{\frac{mg}{\ell}} X$$

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -k X$$

$$\text{振り子の周期は } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

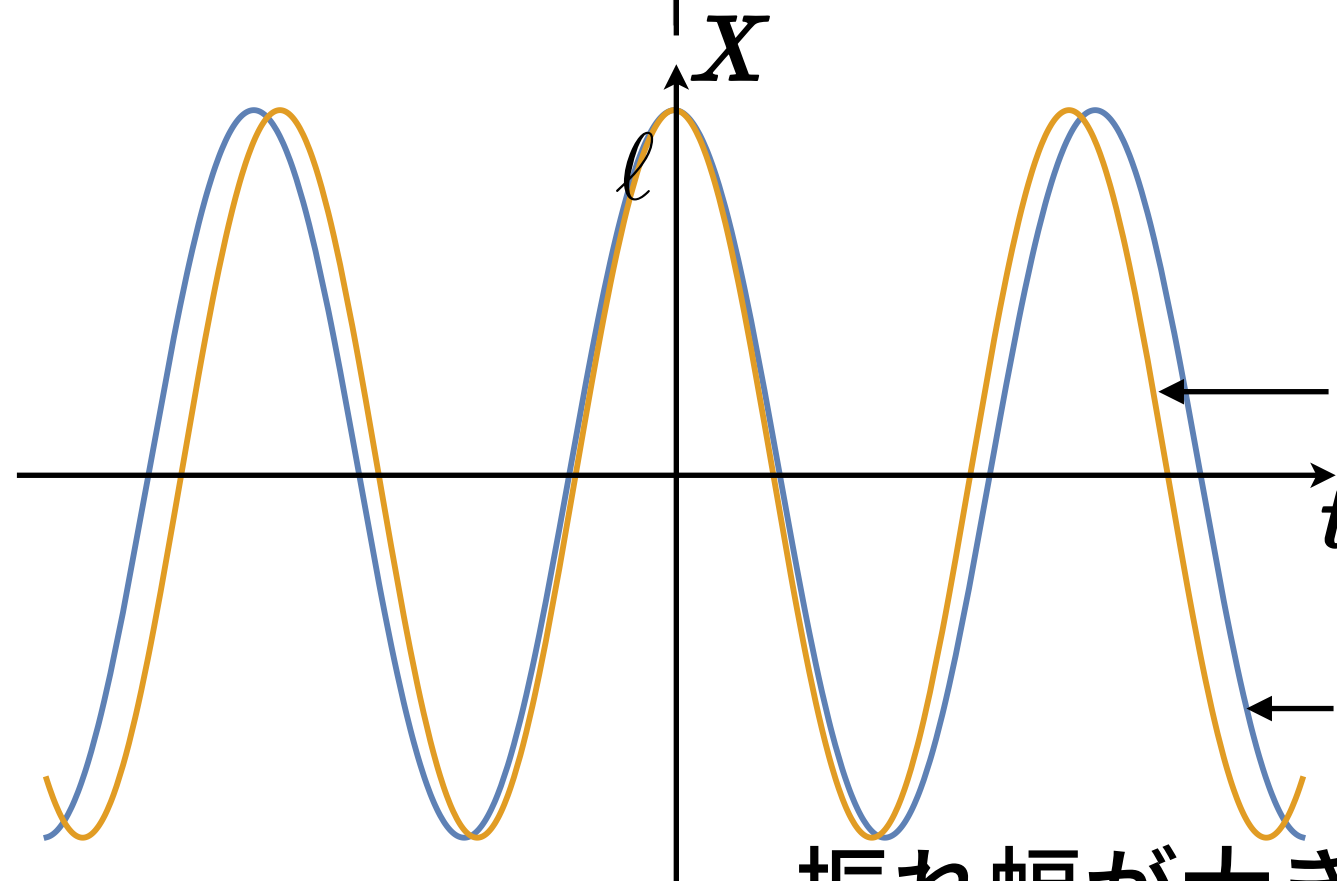


振り子の運動



振れ幅が小さい場合，振り子の運動は近似的に単振動

この時，周期は重力加速度と糸の長さで決まり，振れ幅やおもりの質量によらない

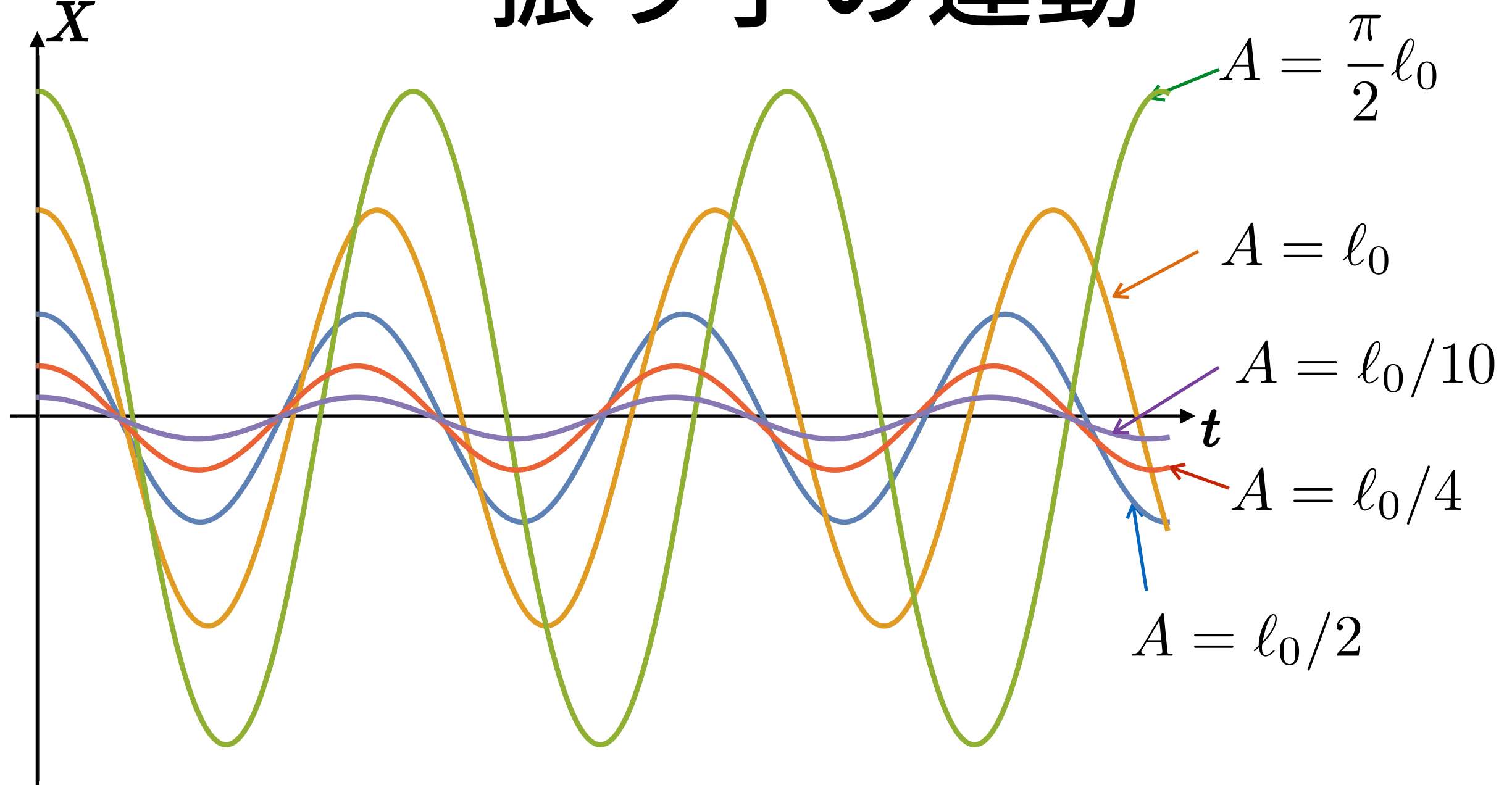


$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -\frac{mg}{\ell} X$$

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -mg \sin \frac{X}{\ell} \quad \leftarrow \text{非線形}$$

振れ幅が大きくなると近似が悪くなる

振り子の運動



振れ幅が大きくなる(単振動の近似が悪くなる)と，周期が最初の振幅に依存するようになる。

$A \ll \ell$ だと周期はほとんど振幅によらない

減衰振動， 強制振動

減衰振動

より現実的なばねの運動を考えると，通常は，抵抗力によって，振動がしだいに小さくなって止まっていく。
この状況を考えてみよう。

ばね定数 k のバネにつながれた物体に， $-2m\gamma v$ の粘性抵抗が作用する状況を考えよう。

運動方程式は $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - 2m\gamma v$

少し書き換えて $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$

抵抗力がない場合
の角振動数



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

これを解く。

減衰振動

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

分類としては線形2階同次(斉次)方程式

解として $x = e^{\lambda t}$ を仮定して代入してみる

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) e^{\lambda t} = 0$$

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ であれば, $x = e^{\lambda t}$ が解になる。

$$\downarrow$$
$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$\gamma^2 - \omega_0^2$ の正負によって, 解の性質が変わってくる

練習 その1

次の微分方程式を満たす一般解をそれぞれ求めよ。

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -16x - 4\frac{dx}{dt}$$

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -16x - 10\frac{dx}{dt}$$

- 手順，
1. $x = e^{\lambda t}$ と置いて方程式に代入
 2. λ が満たす関係式を導く
 3. 2で求めた式を解く。答えが2つ出てくるはず
 4. $x = e^{\lambda t}$ の λ に入れると，2つの解が得られるので，それぞれに任意の定数をかけて足し合わせる。

練習 その2

それぞれに対して， $t=0$ において $x=3, v=0$ の場合の解を求めよ。

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -16x - 4\frac{dx}{dt}$$

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -16x - 10\frac{dx}{dt}$$

- 手順，
1. 先ほど求めた一般解から速度の式を求める
 2. 初期条件を満たすように2つの任意定数の値を決める。

減衰振動

(1)減衰振動 $\omega_0 > \gamma$ 抵抗が小さい

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\omega \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

実数

この場合の一般解は，

$$x = C_+ e^{-\gamma t + i\omega t} + C_- e^{-\gamma t - i\omega t}$$

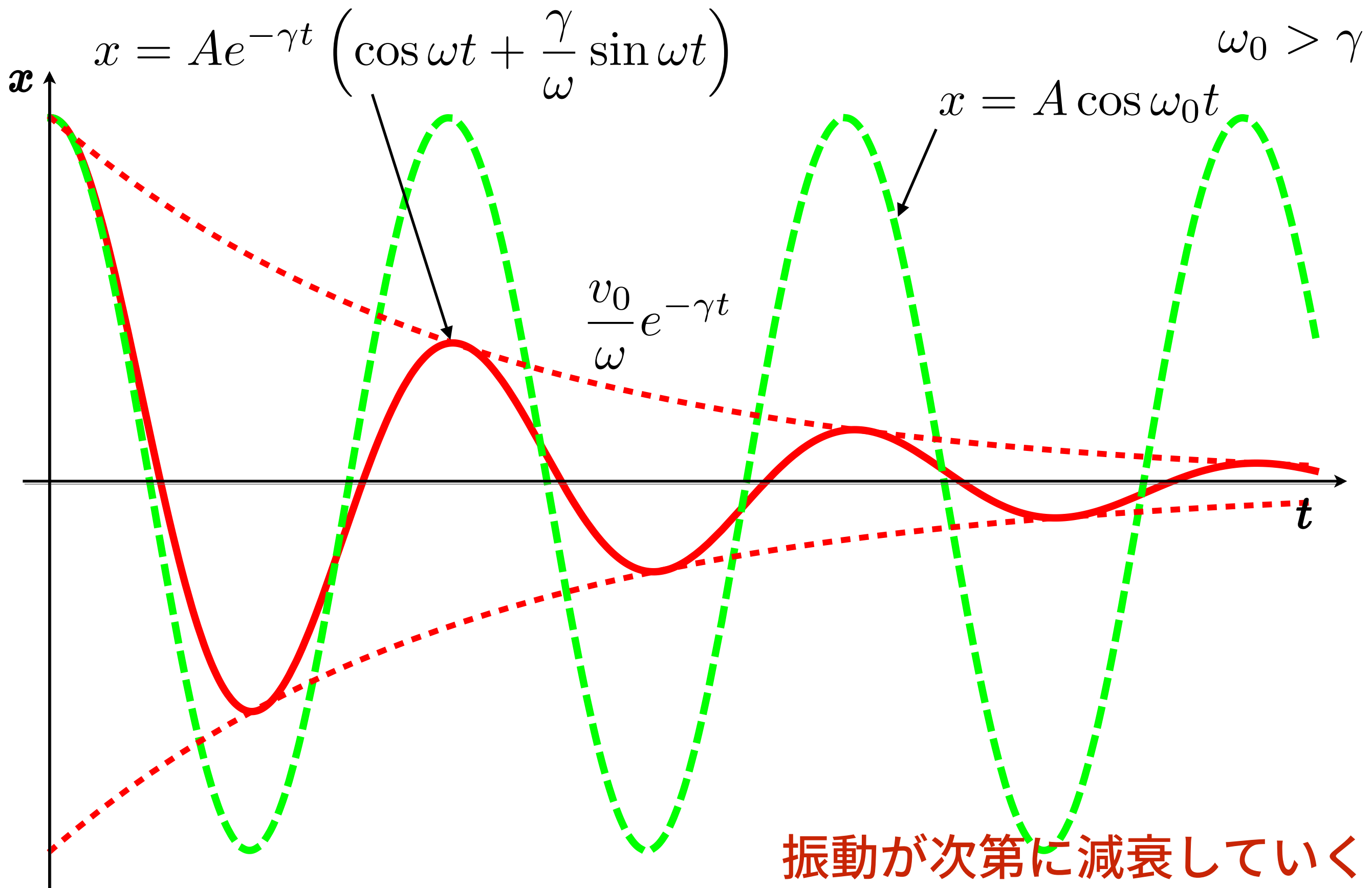
$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$ を用いて，実数の解を作ると

$$x = e^{-\gamma t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

初期条件として， $t=0$ のときに， $x=A$ ， $v=0$ としておくと，

$$x = A e^{-\gamma t} \left(\cos \omega t + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (\text{単振動の場合: } x = A \cos \omega_0 t)$$

減衰振動



減衰振動

(2)過減衰 $\omega_0 < \gamma$ 抵抗が大きい

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\Gamma_{\pm} \quad \Gamma_{\pm} > 0 \text{ に注意}$$

この場合の一般解は，

$$x = C_1 e^{-\Gamma_+ t} + C_2 e^{-\Gamma_- t}$$

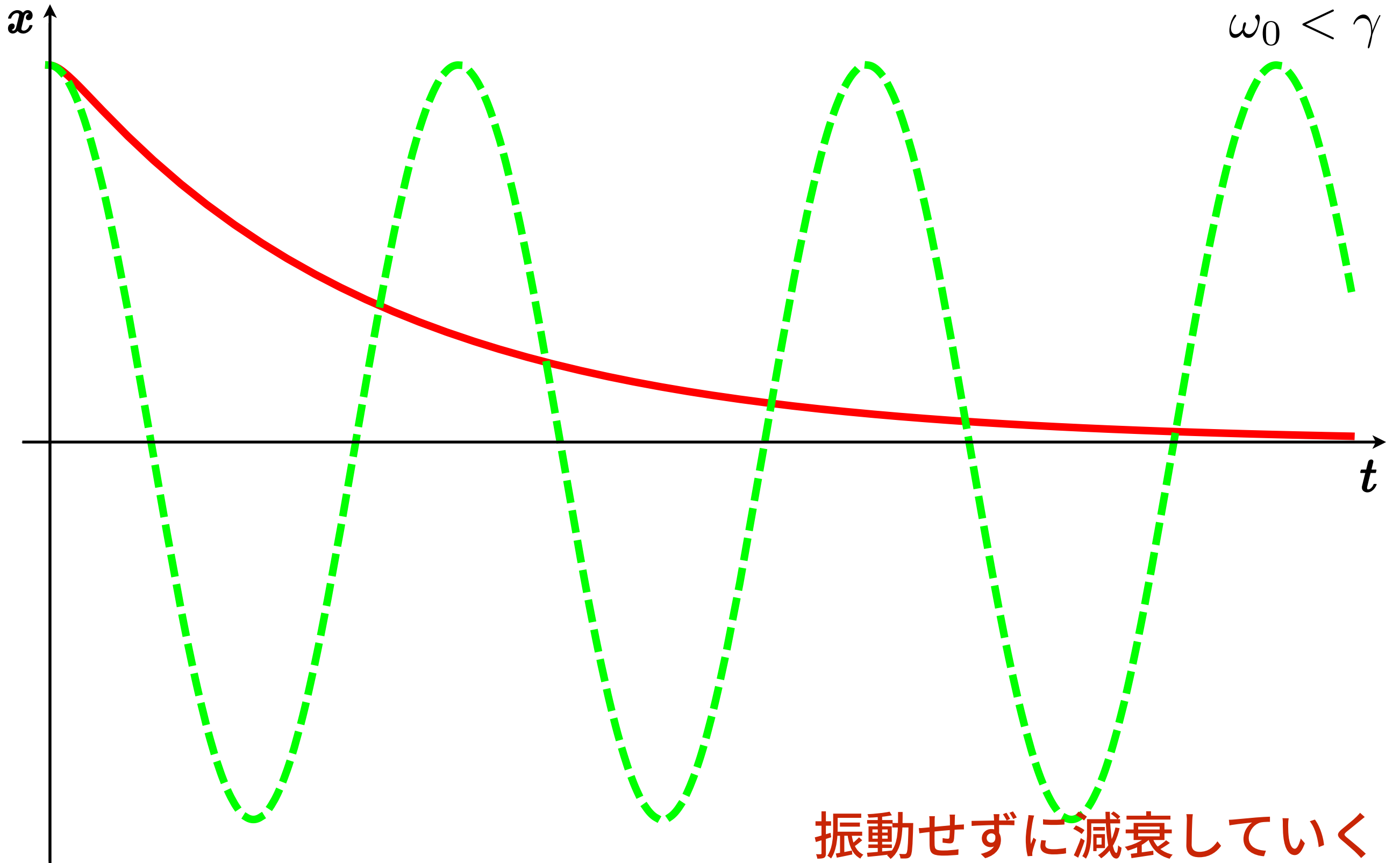
初期条件として， $t=0$ のときに， $x=A$ ， $v=0$ としておくと，

$$x = \frac{A}{\Gamma_- - \Gamma_+} (\Gamma_- e^{-\Gamma_+ t} - \Gamma_+ e^{-\Gamma_- t})$$

三角関数とかは出てこない！

指数関数による減衰のみ

減衰振動



減衰振動

(3)臨界減衰 $\omega_0 = \gamma$ 重根の場合

$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma$ $x = Ce^{-\gamma t}$ だけでは，任意の初期条件に対応できない。

他の解を探す必要がある

$x = B(t)e^{-\gamma t}$ として，運動方程式に入れてみる

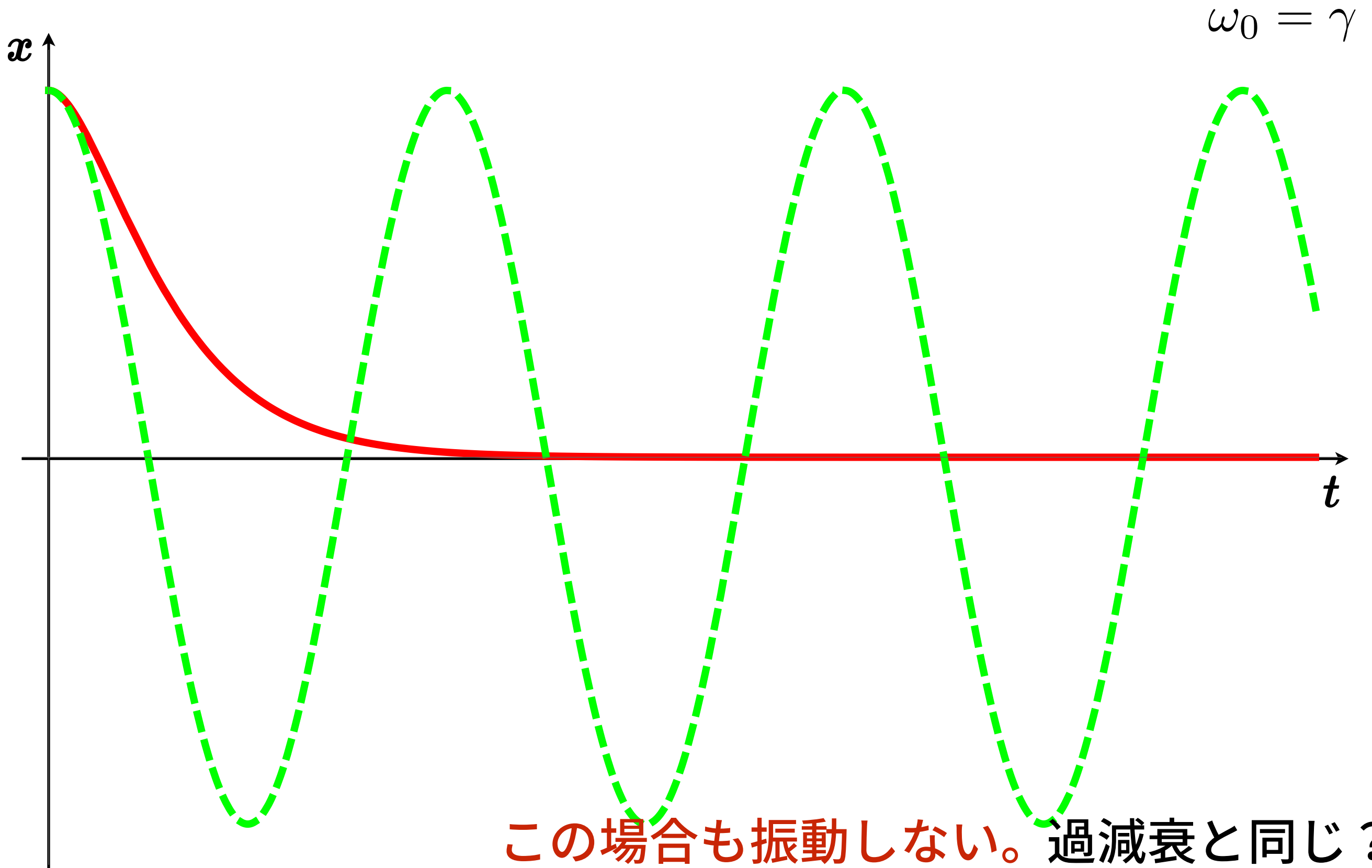
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \xrightarrow{\omega_0 = \gamma} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \gamma^2 x = 0$$
$$\left(\frac{d^2 B}{dt^2} e^{-\lambda t} - 2\lambda \frac{dB}{dt} e^{-\lambda t} + \lambda^2 B e^{-\lambda t} \right) + 2\lambda \left(\frac{dB}{dt} e^{-\lambda t} - \lambda B e^{-\lambda t} \right) + \lambda^2 B e^{-\lambda t} = 0$$

$$\frac{d^2 B}{dt^2} = 0 \text{ よって一般解は } x = (at + b)e^{-\gamma t}$$

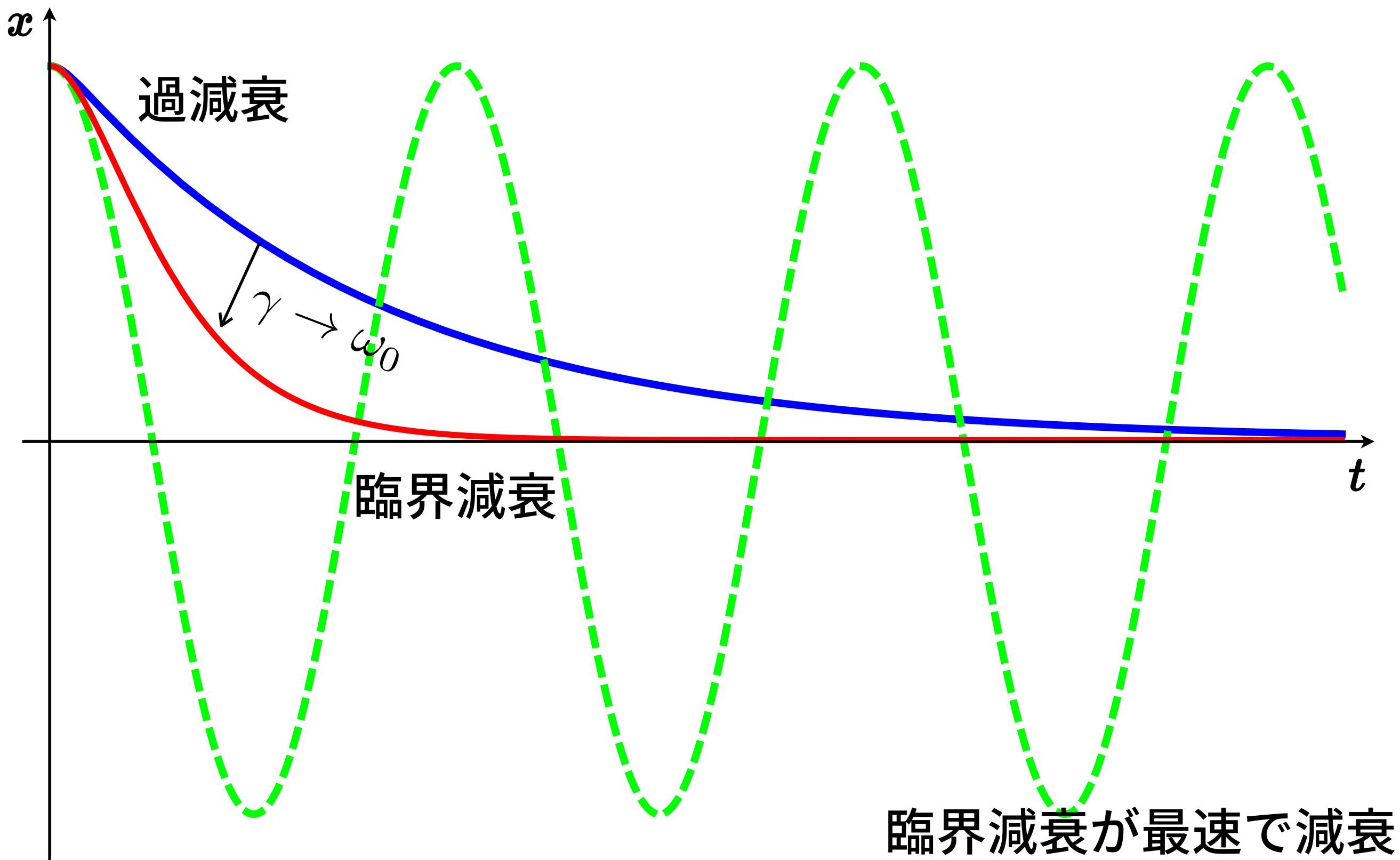
初期条件として， $t=0$ のときに， $x=A$ ， $v=0$ としておくと，

$$x = Ae^{-\gamma t}(\gamma t + 1)$$

減衰振動



過減衰と臨界減衰



減衰振動のエネルギー

運動方程式: $m \frac{dv}{dt} + kx = -2m\gamma v$

両辺に v をかけて整理すると,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right] = -2m\gamma v^2 < 0$$

力学的エネルギーの変化

抵抗力による損失

$-2m\gamma v \frac{dx}{dt}$ と書くと, これは抵抗力

のする仕事 $-2m\gamma v dx$ を dt で割った

もの (仕事率) とみなせる。

強制振動

さらに周期的な外力を加えて，強制的に振らせてみる。

$$F = m f \cos \omega' t \longleftarrow \text{これを加える}$$

運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - 2m\gamma v + m f \cos \omega' t$$

↓

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos \omega' t \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

このような場合の定石：

一般解=(1つの特解)+(右辺=0の場合の一般解)

先ほど求めた解をそのまま使う
(3つの場合のそれぞれに対して)

強制振動

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos \omega' t$$

一般解=(1つの特解)+(右辺=0の場合の一般解)

特解(方程式を満たせば何でもいい)を求めてみよう

$x = B_1 \cos \omega' t + B_2 \sin \omega' t$ として代入してみる

$$\underbrace{(B_1(\omega'^2 - \omega_0^2) - 2B_2\gamma\omega' + f)}_{\nearrow} \cos \omega' t + \underbrace{(2B_1\gamma\omega' - B_2(\omega'^2 - \omega_0^2))}_{\nwarrow} \sin \omega' t = 0$$

両方が0になるように B_1 と B_2 を決める

結果として

$$x = \frac{f}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2} \left(-(\omega'^2 - \omega_0^2) \cos \omega' t + 2\gamma\omega' \sin \omega' t \right)$$

+ 減衰振動の一般解

が得られる

強制振動

$$x = \frac{f}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2} \left(-(\omega'^2 - \omega_0^2) \cos \omega' t + 2\gamma\omega' \sin \omega' t \right)$$

+ 減衰振動の一般解

この部分は時間が経つと，指数関数的に小さくなる

十分な時間が経過した後に残るのは，初期条件に関係なく

$$x = \frac{f}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2} \left(-(\omega'^2 - \omega_0^2) \cos \omega' t + 2\gamma\omega' \sin \omega' t \right)$$

これはよくみると，角振動数 ω' の単振動になっている。

振幅を求めてみると，

$$\frac{f}{\sqrt{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2}}$$

強制振動

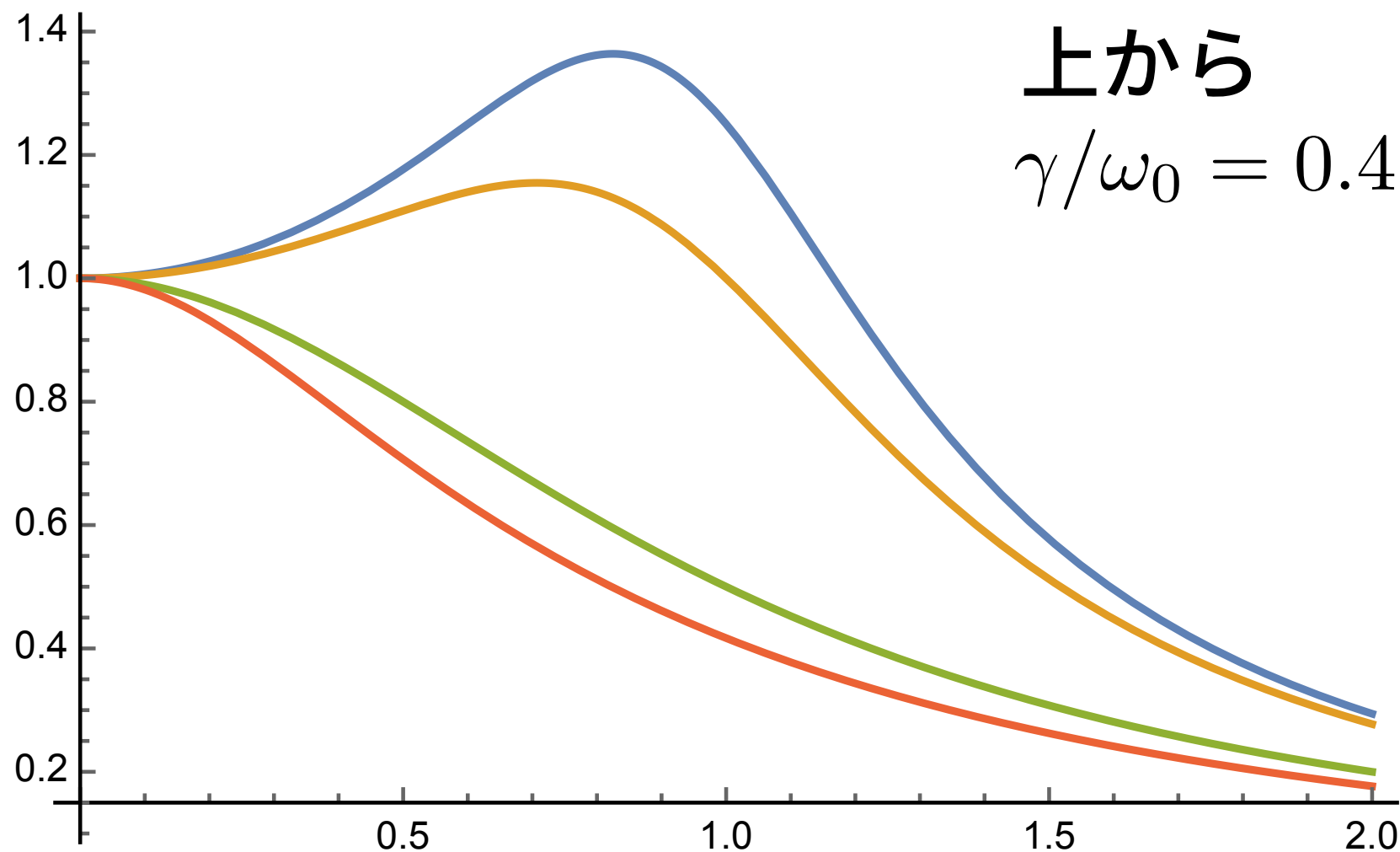
十分な時間が経過した後の振幅

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2}}$$

$$\frac{A\omega_0^2}{f} = \left(\left(\frac{\omega'^2}{\omega_0^2} - 1 \right)^2 + 4 \frac{\gamma^2}{\omega_0^2} \frac{\omega'^2}{\omega_0^2} \right)^{-1/2}$$

この量のふるまいを
調べてみる

$$\frac{A\omega_0^2}{f}$$



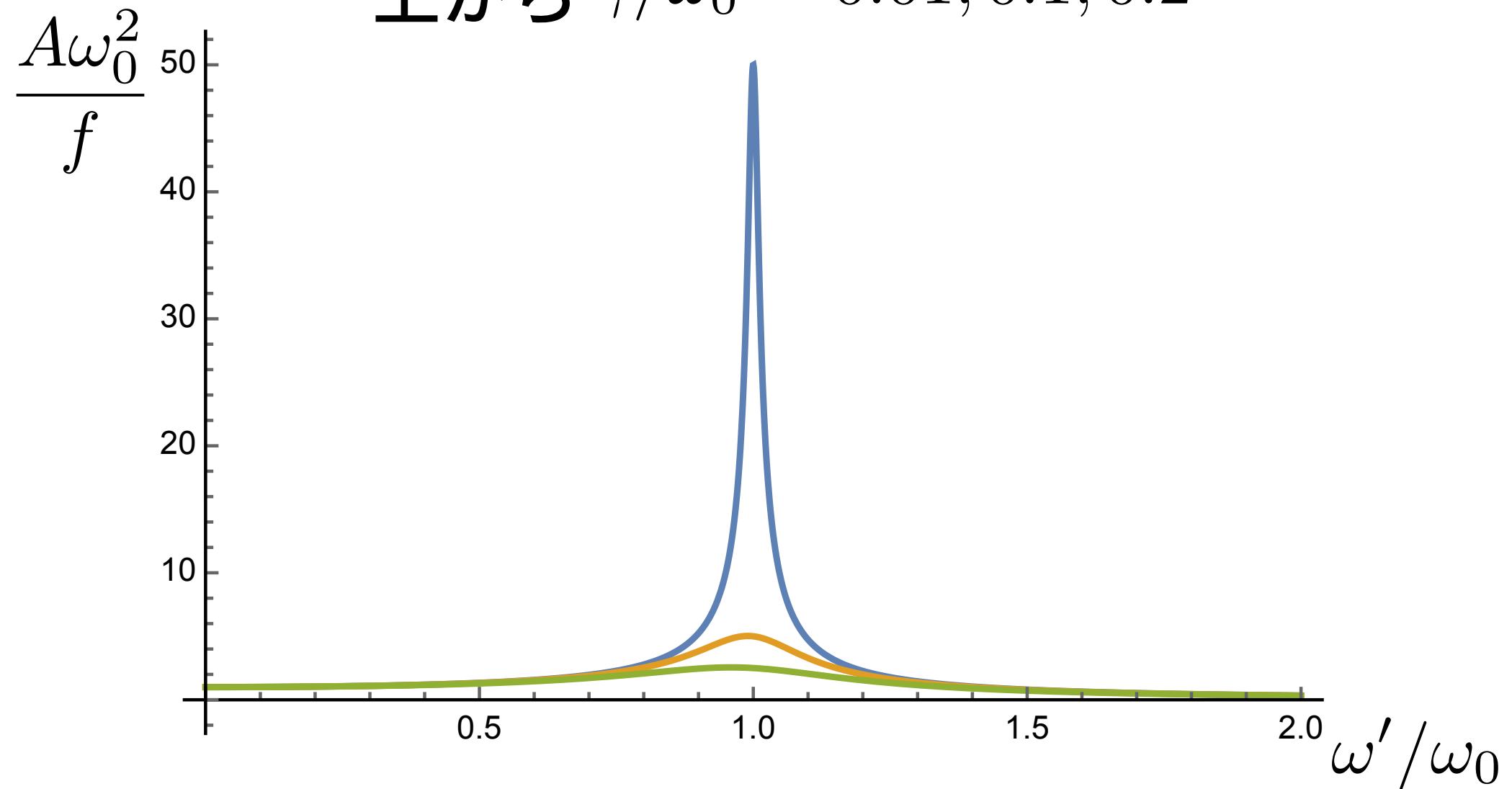
上から

$$\gamma/\omega_0 = 0.4, 0.5, 1, 1.2$$

$$\omega'/\omega_0$$

共鳴

上から $\gamma/\omega_0 = 0.01, 0.1, 0.2$



γ が小さくなると、 $\omega' \simeq \omega_0$ のところで振幅が急激に大きくなる
この時、共鳴が起きている。

共鳴

共鳴が起きている場合の，解のふるまいを調べる

$\gamma = 0$ とすると，

$$x = -\frac{f \cos \omega' t}{\omega'^2 - \omega_0^2} + C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

初期条件として， $t=0$ で $x=A, v=0$ とすると，

$$x = \frac{f}{\omega'^2 - \omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega' t) + A \cos \omega_0 t$$

であるが，ここで $\omega' \rightarrow \omega_0$ の極限をとると

$$x = A \cos \omega_0 t + \frac{ft}{2\omega_0} \sin \omega_0 t$$

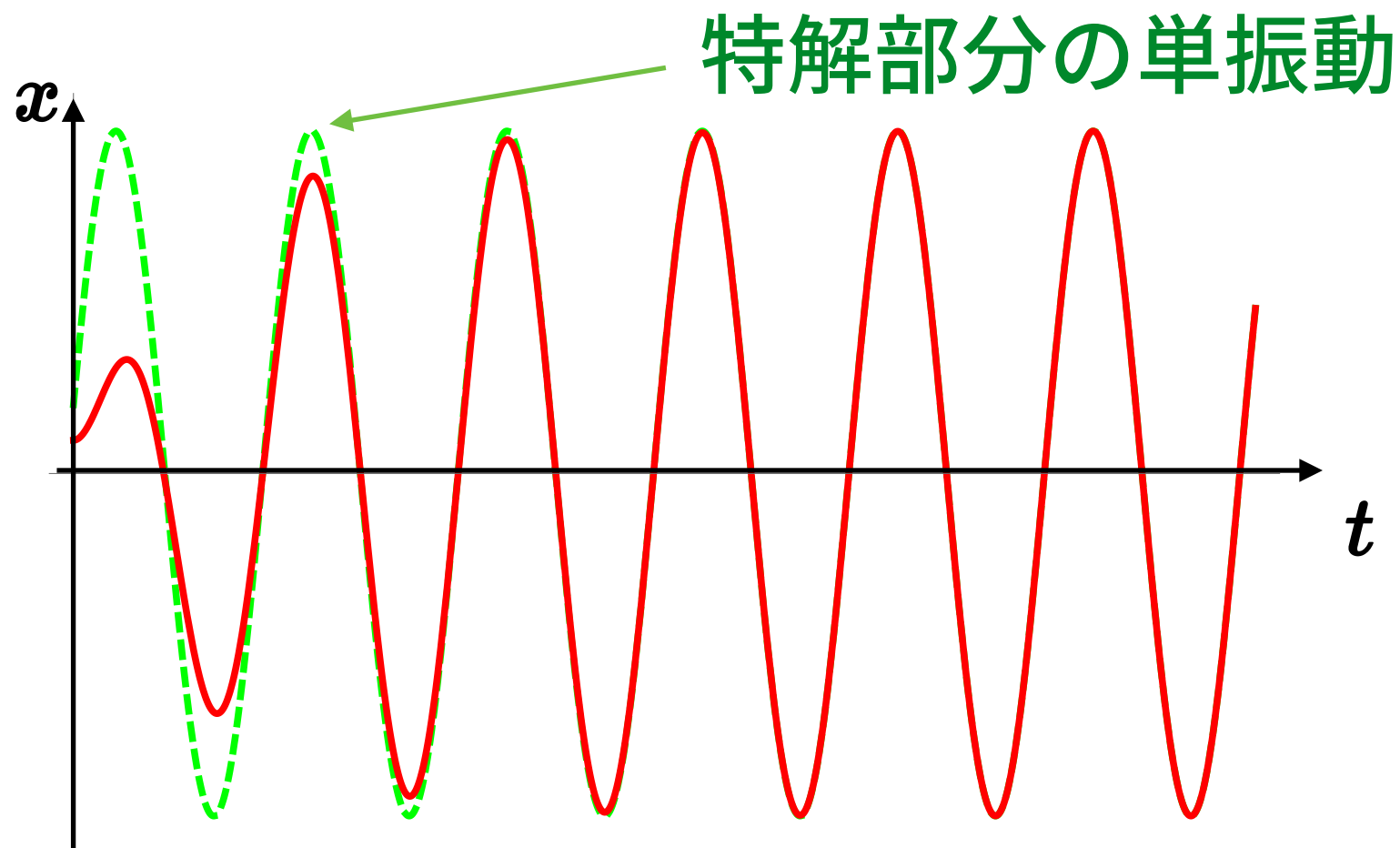
のように時間とともに振幅が増大していく様子がわかる。

強制振動

$$x = \frac{f}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2} \left(-(\omega'^2 - \omega_0^2) \cos \omega' t + 2\gamma\omega' \sin \omega' t \right)$$

+ 減衰振動の一般解

適当な初期条件を設定すると，この部分に含まれる2つの積分定数の値が決定でき，減衰しきる前の運動も正確にわかる。



強制振動のエネルギー

運動方程式: $m \frac{dv}{dt} + kx = -2m\gamma v + m f \cos \omega' t$

両辺に v をかけて整理すると,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right] = -2m\gamma v \frac{dx}{dt} + (m f \cos \omega' t) \frac{dx}{dt}$$

力学的エネルギーの変化

抵抗力による損失 w_r

強制力の仕事率 w

強制振動のエネルギー

w_r と w を外力の1周期 $T = \frac{2\pi}{\omega'}$ にわたって平均してみる

十分な時間が経ったのちには

$$x = \frac{f}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2} (-(\omega'^2 - \omega_0^2) \cos \omega' t + 2\gamma\omega' \sin \omega' t)$$

$$v = \frac{f\omega'}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2} ((\omega'^2 - \omega_0^2) \sin \omega' t + 2\gamma\omega' \cos \omega' t)$$

$$\bar{w}_r = \frac{1}{T} \int_0^T (-2m\gamma v^2) dt = -\frac{f^2 m \gamma \omega'^2}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$$

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T m f v \cos \omega' t dt = \frac{f^2 m \gamma \omega'^2}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$$

すなわち $\bar{w} = -\bar{w}_r$

強制振動のエネルギー

よって、エネルギー変化の平均値は

$$\overline{\left(\frac{dE}{dt}\right)} = \bar{w}_r + \bar{w} = 0$$

エネルギーは平均的には増減がない

強制振動が定常的な運動だと思えば、至極当然な結果